Kurven in Natur und Technik

Zusammenfassung des Vortrages
(Stefan Altherr)

0. Allgemeine Einführung

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit „Kurven in Natur und Technik“!
Wir haben dabei entsprechend der Personenzahl unsere Zeit in vier (hoffentlich) gleichlange Abschnitte aufgeteilt!
Zu Beginn werde ich Allgemeines zum Thema sagen. Ich werde festlegen worum es überhaupt geht, welche Kurventypen wir betrachten und die notwendigen Begriffe samt Definition und Beispielen zur Verfügung stellen.
Im Anschluss daran werden meine Kollegen dann spezieller werden, und auf drei Konkrete Kurven und ihre technische Bedeutung im speziellen eingehen.

1. Kurven in Natur und Technik

1.1 Was ist das eigentlich??

Jeder Körper dem wir in unserem Alltag begegnen, können wir uns als ein System von unendlich vielen, miteinander starr verbundenen, punktförmigen Massen vorstellen.
Was wir nun machen wollen ist zunächst einmal, solche Körper auf einen einzigen, zentralen Punkt (in der Regel den Schwerpunkt) zu reduzieren. Betrachten wollen wir dann die Kurve dieses Punktes unter dem Einfluss äußerer Kräfte. Dabei werden wir um im Rahmen zu bleiben diese äußeren Kräfte auf homogene Kraftfelder, d.h. speziell unsere Erdanziehung begrenzen.
Als nächsten Schritt werden wir dann die Vereinfachung auf ein Ein-Punkt-System weglassen und uns aus unendlich vielen Punkte aufgebaute Körper als bewegtes System betrachten. Bewegen sich alle Punkte in einer Ebene, so spricht man von einer ebenen Bewegung. Wir werden betrachten wie sich einzelne Punkte beim Wälzen bzw. Abrollen auf einer Fläche verhalten.

1.2 Didaktischer Hintergrund

Warum das ganze?
Jeder der schon mal Schüler unterrichtet hat kennt die Frage: „Warum machen wir denn das?“ Und dann gilt es in der Regel praktische Anwendungen aus dem Umfeld der Schüler zu finden.
Bei linearen Gleichungen kann es das Aufstellen der Handy-Rechnung sein, bei Flächenberechnungen die Anzahl der Tapetenrollen die man braucht. Bei den Kurven ist es schwieriger einfache und anschauliche Beispiele zu finden!
Schließlich geht es im Endeffekt nur darum die Schüler für die betreffende Lerneinheit mit Hilfe praxisbezogener Beispiele zu motivieren.
Für die Kurven ist dabei in vielen Fällen der Blick zu physikalischen bzw. technischen Vorgängen nötig, wie sie in diesem Vortrag behandelt werden. Wir wollen heute die benötigten Hintergründe sowie die Beispiele selbst liefern, wie sie zumindest zum Teil im Schulunterricht behandelt werden können.

2 Kurven im homogenen Kraftfeld

Bewegt sich ein Körper in der nähe der Erdoberfläche in einem begrenzten Bereich, so wirkt die Schwerkraft in jedem Punkt mit gleichem Betrag und in gleicher Richtung. Deshalb kann ihre Wirkung mit einem einzigen Kraftvektor beschrieben werden, weshalb wir von einem homogenen Feld sprechen.
Der Betrag der Schwerkraft, d.h. das Gewicht F_G eines Körpers hängt direkt von der Masse m und der Ortskonstanten g ab: $F_G = mg$

2.1 Der freie Fall

Überlässt man einen zunächst ruhenden Körper der alleinigen Wirkung der Schwerkraft, so bewegt er sich auf einer geraden gleichmäßig beschleunigt nach unten! Dabei gelten $s = ½ a t^2$ und $v = s/t$!
Dabei ist zu beachten, dass die Reibung vollständig außer acht gelassen wird!
Den Zusammenhang zur Veränderung der Lage auf Grund einer angreifenden Kraft liefert dabei Newtons Grundgleichung der Mechanik $F = ma$, wodurch wir im Vergleich zu obiger Gleichung die Ortskonstante g als Beschleunigung a erkennen!

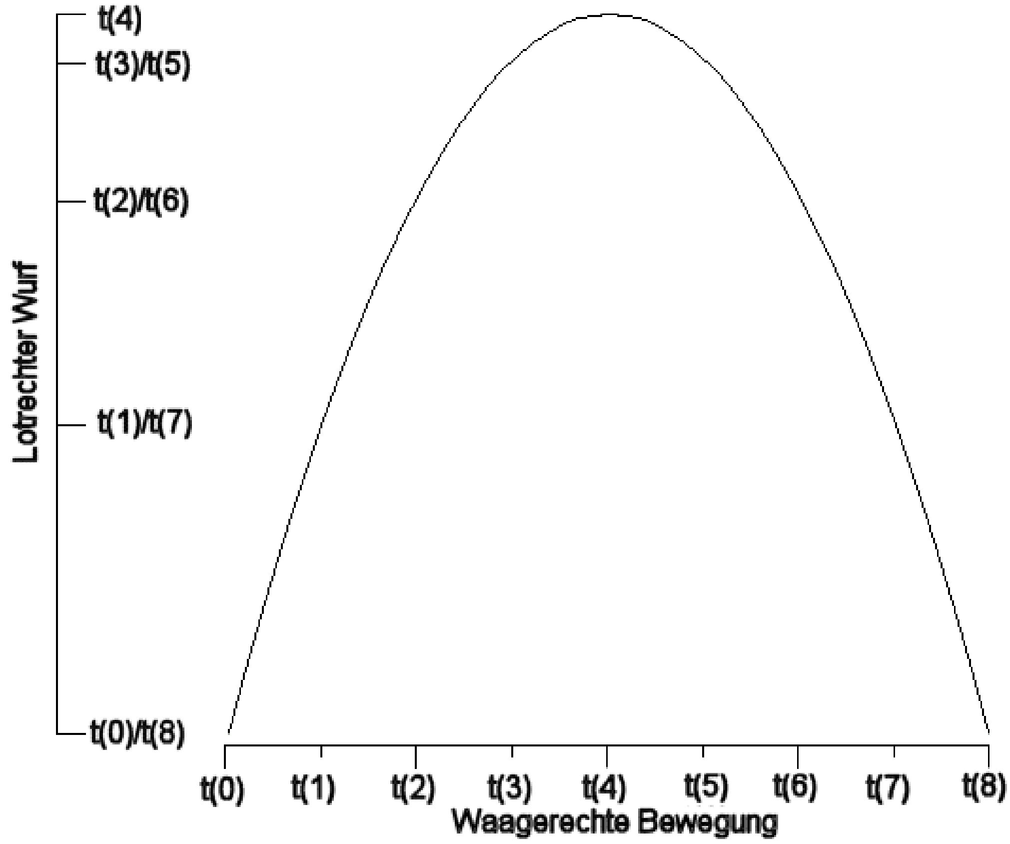
2.2 Der lotrechte Wurf

Ruht der Körper nicht zu Beginn der Rechnung, sondern bewegt sich entgegen der Beschleunigungsrichtung des Schwerefeldes (z.b. eine gut austachierte Sylvesterrakete oder ein Stein der gerade nach oben geworfen wird), so muss dies mit in der Rechnung berücksichtigt werden.
Zur Starzeit besitzt der Körper nun die Geschwindigkeit $-v_0$ (negativ, weil entgegen der Erdbeschleunigung) und befindet sich zur Zeit t am Ort $s= -v_0 t$.
Daher ergibt sich nun als neue Ortsgleichung $s= -v_0 t + ½ g t^2$

2.3 Superpositionsprinzip und schräger Wurf

Bisher haben wir nur Würfe in einer Dimension betrachtet! Interessanter wird es nun, wenn wir zum schrägen Wurf übergehen, und somit ein Zweidimensionales Modell betrachten müssen.
Für die Betrachtung dieses Vorganges benötigen wir nun das Prinzip der ungestörten Überlagerung von Bewegungen, welches sich leicht (z.b. im Physikunterricht) experimentell nachweisen lässt:
Führt ein Körper gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen aus, so überlagern sich diese Bewegungen ungestört zur Gesamtbewegung. Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen addieren sich vektoriell!

D.h. wir können uns den schrägen Wurf zusammengesetzt aus lotrechtem Wurf und wagerechter Bewegung!



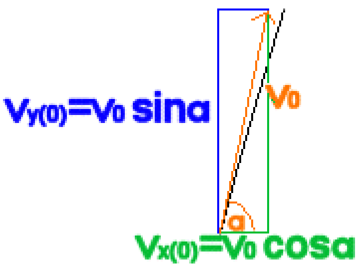
Der Körper möge nun mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Wurfwinkel a (gegenüber der Horizontalen) abgeworfen werden. In Richtung der x-Achse liegt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vor:

$s_x = v_0\, t \cos(a)$; $v_x = v_0 \cos(a)$; $a_x = 0$

In Richtung der y-Achse folgt die Bewegung den Gesetzen des lotrechten Wurfes mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin(a)$:

$s_y = v_0\, t \sin(a) - \frac{1}{2} g t^2$; $v_y = v_0 \sin(a) - g\, t$; $a_y = -g$

2.4 Zusammenfassung



Wir haben jetzt also im ersten Teil solche Kurven betrachtet, wie sie die Schwerpunkte von Körpern unter dem Einfluss eines homogenen Kraftfeldes beschreiben. Dabei haben wir die Luftreibung außer acht gelassen. Dennoch genügen die Ergebnisse um z.b. den Wurf eines Steines oder den Abschuss einer Kugel zu beschreiben.

Die hier erlangten Ergebnisse gelten (von besagter Einschränkung abgesehen) auch für ausgedehnte Körper. Was allerdings passiert, wenn diese Körper aufeinander treffen wird im nächsten Abschnitt beschrieben!

3 Rollkurven

Im mathematischen Modell stellt es sich so dar, dass mit dem sich bewegenden Körper ein Koordinatensystem mitgeführt wird, in dem alle seine Punkte bewegungsinvariante Koordinaten haben.

Bahnkurven entstehen, wenn man die Bewegung des Körpers bzw. des mitlaufenden Gangsystems in Bezug zu einem festen äußeren Koordinatensystem, dem Rastsystem setzt.

Sinnigerweise werden wir das Rastsystem jeweils im festen Untergrund fixieren.

Wesentlich bei unseren Betrachtungen ist, dass die Körper ohne zu gleiten auf dem Untergrund abrollen.

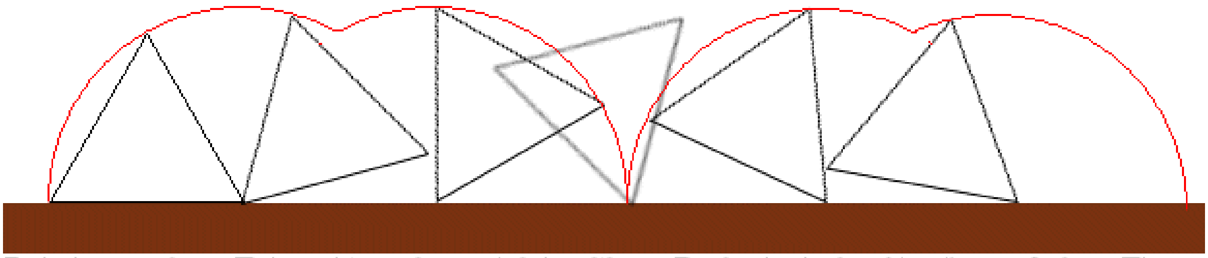
Wir betrachten Bewegungen, die dadurch zustande kommen, dass eine im Gangsystem gegebene Kurve k (die sog. Gangpolkurve) auf einer Kurve K des Rastsystems (der Rastpolkurve) ohne zu gleiten abrollt und das Gangsystem mitnimmt.

3.1 Rollkurve

Unter einer Rollkurve verstehen die in bezug auf das Rastsystem beschriebene Bahnkurve eines beliebigen Punktes P des Gangsystems.

Dabei sind sowohl die Form des abrollenden Körpers, die des Untergrundes als auch die Lage de Punktes P im Körper beliebig!

3.1.1 Abrollendes gleichseitiges Dreieck auf ebener Fläche



Bahnkurve eines Eckpunktes eines gleichseitigen Dreiecks beim Abrollen auf einer Ebene

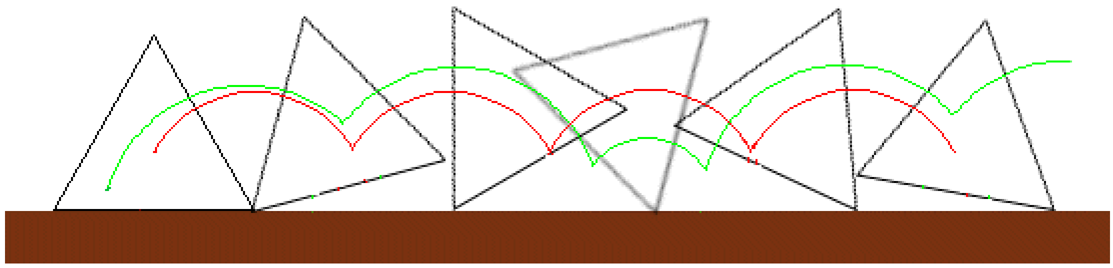
Die Bahnkurve setzt sich hier aus verschiedenen Drehungen zusammen, wobei das Zentrum jeweils der am weitesten in Bewegungsrichtung liegende, die Rastgerade berührende Dreieckseckpunkt ist. Die Bahnkurve besteht also aus Kreisbögen mit der Seitenlänge als Radius und 120°! Ist der beobachtete Punkt gerade Drehpunkt, so verharrt die Kurve dort, wodurch ein Dritter Bogen pro Umdrehung vermieden wird, so dass sich jede Periode aus zwei Kreisbögen zusammensetzt.

Betrachten wir die Gesamtheit der Bahnkurven aller Punkte des Gangsystems, so bilden die Bahnnormalen in jedem Stadium des Bewegungsprozesses ein Geradenbüschel mit dem momentanen Drehpunkt als Scheitel!

Für eine analytische Betrachtung sei nun $C(c_1;c_2)$ der momentane Drehpunkt. Der Punkt $P(x;y)$ geht bei Drehung um C mit dem Drehwinkel a über in den Punkt $P'(x';y')$

$x' = (x - c_1) \cos a - (y - c_2) \sin a + c_1$

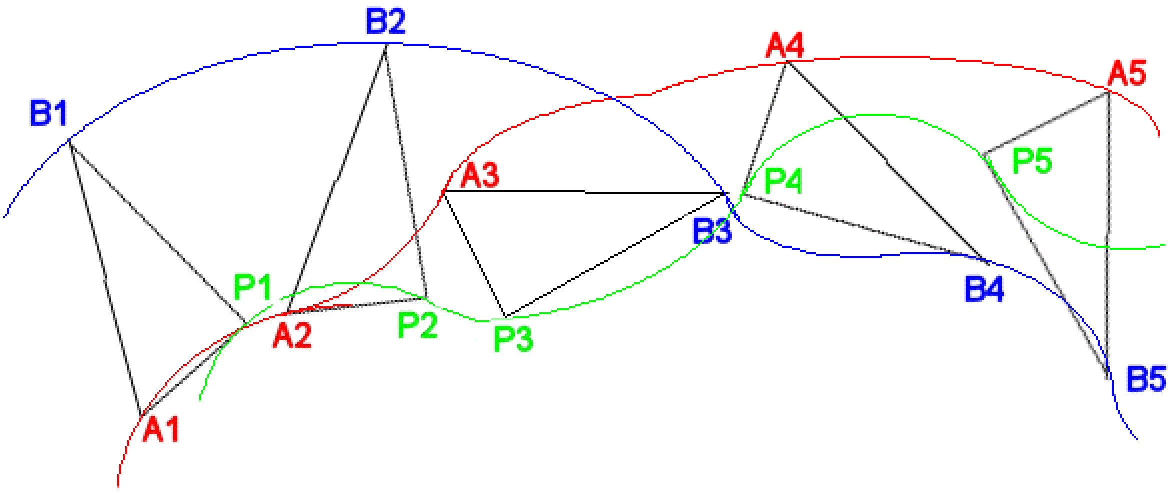
$y' = (x - c_1) \sin a + (y - c_2) \cos a + c_2$



Bahnkurve zweier beliebiger Punkte eines gleichseitigen Dreiecks

3.1.2 Beliebige Bewegungen des Gangsystems gegenüber des Rastsystems

Wir analysieren die Bewegung des Gangsystems gegenüber dem Rastsystem. Diese ist vollständig durch Angabe der Bahnkurven a und b zweier Punkte A bzw. B beschrieben. Ist P ein weiterer Punkt, so sind alle im Laufe der Bewegung gebildeten Dreiecke ABP gleichsinnig kongruent.



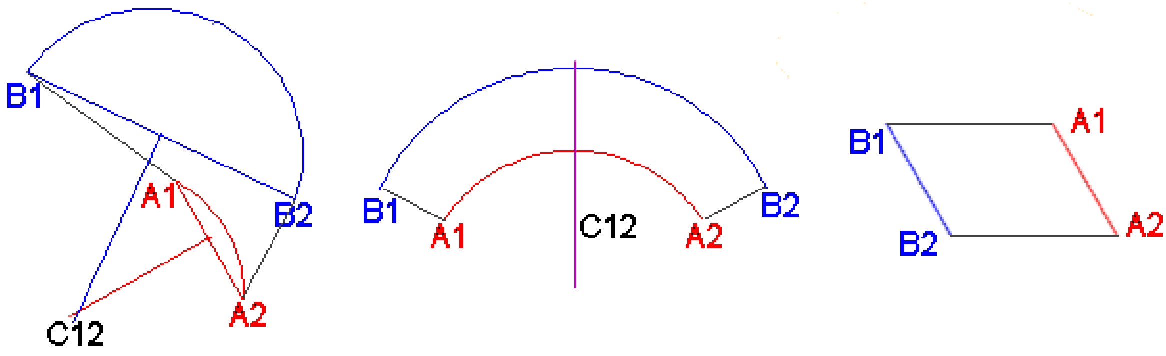
Vergleicht man nun zwei dicht aufeinanderfolgende Lagen A1 und A2 bzw. B1 und B2 auf den dazugehörigen Bahnkurven, so stellt man fest, dass die dazugehörigen Kurvenbögen A1A2 und B1B2 unterschiedlich lang sind. Die Bahnen also mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Man unterscheidet nun drei Fälle:

Im ersten Fall kann das Gangsystem aus der Lage 1 in Lage 2 mittels einer Drehung um C12 überführt werden.

Im zweiten Fall ist der Drehpunkt der Schnittpunkt der Geraden g(A1;B1) und h(A2;B2).

Im dritten schließlich hängen die Lagen durch Verschiebung zusammen, welche als Drehung um ein unendlich fernes Zentrum aufgefasst werden kann.



Die Existenz eines Drehzentrums ist also in jedem Fall gesichert! Dadurch erhalten wir den Fundamentalsatz der ebenen Kinematik:

Irgend zwei Lagen eines ebenbewegten, starren Systems können durch eine Drehung (im Grenzfall Verschiebung) ineinander überführt werden.

3.1.3 Übergang zu kleinsten Abschnitten

Lässt man die Zeitspanne t1-t2 in der das System von Lage 1 zu Lage 2 übergeht gegen Null gehen, so gehen die Mittelsenkrechten in die jeweiligen Bahnnormalen auf a bzw. b über. Betrachtet man die Gesamtheit aller Bahnkurven, erhalten wir (wie beim Dreieck bereits festgestellt) folgende allgemein gültigen Satz:

In jedem Augenblick der Bewegung eines starren ebenen Systems sind die Bahnnormalen der Systempunkte kopunktal (d.h. sie treffen sich in einem Punkt). Der gemeinsame Punkt heißt momentaner Drehpunkt!

Kennt man also den momentanen Drehpunkt C(p) zu einem Kurvenpunkt P, so ergibt sich die zugehörige Normale als Verbindungsgerade g(P;C(p)). Damit ist auch die Tangente in P bestimmt.
Man sieht also, dass bei einem Rollprozess der momentane Kontaktpunkt der beiden Kurven mit dem momentanen Drehpunkt übereinstimmt.

4 Zusammenfassung

Damit sind die Grundlagen zur Behandlung des Themas Kurven in Technik und Natur gelegt.
Bei Kurven im homogenen Kraftfeld bleibt als wichtige Feststellung das Superpositionsprinzip, welches die Zerlegung von Kräften und Bewegungen in ihre Komponenten erlaubt.
Bei Rollkurven die Erkenntnis, dass sich zwei Lagen eines starren Systems durch Drehung zur Deckung bringen lassen, und das bei Rollprozessen der Kontaktpunkt mit dem Drehzentrum übereinstimmt.
Alles weitere nun von meinen Kollegen!

5. Anhang

Folgende Euklid-Dynageo-Dateien liegen bei:

Kurven1.geo

Vergleich von „lotrechtem Wurf“, „waagerechter Bewegung“ und des daraus zusammengesetzten „schrägen Wurfs“.

Kurven2.geo

Konstruktion der Rollkurve eines Punktes im Inneren des abrollenden Dreiecks.
Der Innere Punkt (rot) lässt sich verschieben. Die Rollkurve ist jeweils der oberste Kreisbogen.

Kurven3.geo

Konstruktion der Rollkurve eines Punktes im Inneren des abrollenden Vierecks.
Der Innere Punkt lässt sich verschieben, ebenso die Eckpunkte. Die Rollkurve ist jeweils der oberste Kreisbogen.